SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE

REGOLARITA' MASSIMALE PER EQUAZIONI PARABOLICHE IN SPAZI DI SOBOLEV

16 MARZO 1989

1. INTRODUZIONE

In questo seminario esporrò alcuni risultati, ottenuti in collaborazione con A. Venni, sulla regolarità massimale per soluzioni del problema di Cauchy in uno spazio di Banach complesso E

$$(1) \qquad \begin{cases} u'(t) = Gu(t) + f(t) \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

sotto ipotesi che consentano lo studio di un problema di valori iniziali e al contorno per una equazione parabolica in spazi di Sobolev.

Lo studio di (1) può essere fatto, per esempio, tramite la teoria dei semigruppi (analitici nel caso di equazioni paraboliche) o mediante risultati sulla somma di operatori chiusi (vedi tra l'altro [DPG] e [DV1]).

In ogni caso una ipotesi essenziale è che G, operatore lineare chiuso nello spazio E, abbia risolvente che contiene un opportuno sottoinsieme illimitato di C e che l'operatore risolvente $(\lambda-G)^{-1}$ abbia norma che decresce all'infinito come $|\lambda|^{-1}$ su tale sottoinsieme.

La ipotesi che G abbia dominio denso, necessaria alla teoria classica dei semigruppi, non è invece essenziale, almeno nel caso di semigruppi analitici. Tuttavia se G è la realizzazione in $W^{k,p}(\Omega)$ (Ω aperto strettamente contenuto in R^n, con frontiera abbastanza regolare) di un operatore ellittico con dati al bordo nulli, allora si ha la decrescenza richiesta del risolvente solo per k piccolo (k=0 per il problema di Dirichlet, k = 0,1 per Neumann).

Stime sul comportamento all'infinito del risolvente in $W^{k,p}$ possono essere ottenute facilmente nel caso, semplice ma significativo, del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace nel semispazio R^n_+.

Sia quindi $k \in N$, $p \in [1,+\infty[$,

$\mathcal{D}(G) = W^{k+2,p}(R^n_+) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(R^n_+)$ $\quad G:\mathcal{D}(G) \to W^{k,p}(R^n_+)$ tale che $Gu = \Delta u$.

Fissiamo $\lambda \in \rho(G)$. Sia $C = \|(\lambda-G)^{-1}\|$. Sia $f \in W^{k,p}(R^n_+)$ e $u = (\lambda-G)^{-1}f$, cioè u soluzione di

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{in } R^n_+ \\ u\big|_{\partial R^n_+} = 0 \end{cases}$$

Scelto $t \in R^+$, per $x \in R^n_+$ poniamo $v(x) = u(tx)$, $g(x) = t^2 f(tx)$.
Questo significa che v è soluzione di

$$\begin{cases} t^2\lambda v - \Delta v = g & \text{in } R^n_+ \\ v\big|_{\partial R^n_+} = 0 \end{cases}$$

cioè $v = (t^2\lambda-G)^{-1}g$ e $t^2\lambda \in \rho(G)$.

Inoltre se $t \geq 1$ si ha, indicando con $\|D^j\phi\|$ la somma delle norme delle derivate parziali di ordine j della funzione ϕ :

$$\|v\|_{W^{k,p}} = \sum_{j=0}^{k} \|D^j v\|_{L^p} = \sum_{j=0}^{k} t^{j-\frac{n}{p}} \|D^j u\|_{L^p} \leq$$

$$\leq t^{k-\frac{n}{p}} \|u\|_{W^{k,p}} \leq C\, t^{k-\frac{n}{p}} \|f\|_{W^{k,p}} =$$

$$= C\, t^{k-\frac{n}{p}} \sum_{j=0}^{k} t^{-2-j+n/p} \|D^j g\|_{L^p} = C \sum_{j=0}^{k} t^{-2+k-j} \|D^j g\|_{L^p}$$

Perciò, posto $s = t^2$, si ha

$$(2) \qquad \|(s\lambda-G)^{-1}g\|_{W^{k,p}} \leq C \sum_{j=0}^{k} s^{-1+\frac{k-j}{2}} \|g\|_{W^{j,p}}$$

Tale stima non è la migliore possibile,in questo vari addendi possono essere omessi, ma è comunque utile per avere una idea del comportamento del risolvente.

Nel seguito illustrerò come costruire una teoria che consenta di ottenere risultati per il problema (1) nel caso in cui il risolvente di G si comporti nel modo sopra descritto.

Per la precisione il problema (1) può essere ridotto a un problema del tipo

$$(3) \qquad (A + B)u = f$$

in un opportuno spazio X di funzioni a valori nello spazio di Banach E, ponendo

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in X : \forall t \;\; u(t) \in \mathcal{D}(G), \quad Gu(t) \in X\}$$

$$A: \mathcal{D}(A) \to X \quad \text{tale che} \quad (Au)(t) = Gu(t)$$

$$\mathcal{D}(B) = \{u \in X : u' \in X, \;\; u(0) = 0\}$$

$$B: \mathcal{D}(B) \to X \quad \text{tale che} \quad Bu = -u'$$

Il problema (3) verrà studiato in una opportuna "scala finita" di spazi $X_0 \ldots X_n$, facendo ipotesi che da un lato garantiscano la applicabilità di risultati noti sulla somma di operatori,se si lavora nel più grande degli spazi, e d'altra parte siano soddisfatte da operatori che si comportano come in (2).

Questo consentirà di avere esistenza e unicità di soluzioni di (3) nello spazio più grande, riducendo così il problema a dimostrare che la soluzione appartiene allo spazio più piccolo.

2. REGOLARITA' IN SPAZI DI INTERPOLAZIONE

In questo paragrafo verrà esposta una estensione dei risultati di Da Prato e Grisvard nel caso parabolico commutativo ([DPG] § 3.2).

Per $0\leq k\leq n$ sia X_k uno spazio di Banach complesso con X_{k+1} immerso con continuità in X_k.

Siano $A:\mathcal{D}(A)\to X_0$, $B:\mathcal{D}(B)\to X_0$ operatori lineari con dominio contenuto in X_0. Le ipotesi su A e B che verranno utilizzate sono le seguenti:

H1) Il risolvente di A in X_0 contiene

$\Sigma_A = \{\rho\, e^{i\phi}: \rho\geq 0,\ \theta_A\leq\phi\leq 2\pi-\theta_A\}$ e su Σ_A vale $\|(\lambda-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq C\,(1+|\lambda|^{-1})$

H2) Il risolvente di B in X_0 contiene

$\Sigma_B = \{\rho\, e^{i\phi}: \rho\geq 0,\ \theta_B\leq\phi\leq 2\pi-\theta_B\}$ e su Σ_B vale $\|(\lambda-B)^{-2}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$

H3) $\theta_A + \theta_B < \pi$

H4) Per $\lambda\in\rho(A)$ e $\mu\in\rho(B)$, $(\lambda-A)^{-1}$ commuta con $(\mu-B)^{-1}$

H5) Per $k = 1,2\ldots n$ X_k è invariante per $(\lambda-B)^{-1}$ e su Σ_B vale $\|(\lambda-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_k)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$

H6) Per j,k interi tali che $0\leq j\leq k\leq n$ esiste una funzione $R_{k,j}: \Xi\to\mathcal{L}(X_j,X_k)$ olomorfa su un aperto Ξ contenente Σ_A e tale che $\forall\lambda\in\Xi$ $\forall x\in X_k$

$$(\lambda-A)^{-1}x = \sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda)x$$

H7) Esistono $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ con

$0 = \alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n$ tali che $\forall\lambda\in\Xi$

$\|R_{k,j}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X_j,X_k)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1+\alpha_k-\alpha_j}$;

H8) Indicata con B_j la parte di B in X_j $\forall \lambda \in \Xi$, $\forall \mu \in \rho(B)$ $R_{k,j}(\lambda)\,(\mu - B_j)^{-1} = (\mu - B_k)^{-1} R_{k,j}(\lambda)$

Le ipotesi H1-H4 sono essenzialmente le ipotesi di [DPG] § 3.2 e da esse segue:

Teorema 1. ([DPG] teor. 3.11). *L'equazione* $(A+B)u = x$ *ha al più una soluzione* Sx *in* X_0 *con*

$$Sx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda - A)^{-1}(\lambda + B)^{-1} x \, d\lambda$$

essendo Γ *la curva composta da due semirette uscenti dall'origine passanti per* $e^{\pm i\phi}$ $(\theta_A < \phi < \pi - \theta_B)$, *orientata per parte immaginaria crescente.*

Se inoltre x *appartiene allo spazio di interpolazione reale* $(X_0, \mathcal{D}(B))_{\theta,p}$ $(\theta \in]0,1[,\ p \in [1,+\infty])$ *allora esiste la soluzione* Sx *in* $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ *e* ASx *e* BSx *appartengono allo stesso spazio di interpolazione.*

L'unicità della soluzione segue dal fatto che se $u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ allora $S(A+B)u = u$, cioè $(A+B)u = x \implies u = Sx$.

Tale fatto si ottiene facilmente utilizzando la teoria dei residui.

Per avere esistenza è necessario che $Sx \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.
La funzione che a λ associa $(\lambda - A)^{-1}B(\lambda + B)^{-1}x$ in generale decresce come $|\lambda|^{-1}$ allo infinito, ma se x appartiene a uno spazio di interpolazione reale $(X_0, \mathcal{D}(B))_{\theta,p}$ allora $\|B(\lambda+B)^{-1}x\|$ decresce come $|\lambda|^{-\theta}$ e allora l'integrale

$$\int_{\Gamma} (\lambda - A)^{-1}B(\lambda + B)^{-1}x \, dx$$

converge, quindi $Sx \in \mathcal{D}(B)$ e BSx coincide con l'integrale scritto sopra. Riscrivendo Sx in modo opportuno si ottiene anche che esso appartiene a $\mathcal{D}(A)$ e quindi Sx è soluzione.

Infine per $t\in R^+$ si ha

$$t^\theta B(t+B)^{-1}\,Bsx = t^\theta(1-t(t+B)^{-1})BSx = -\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-A)^{-1}B(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda +$$

$$+\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-A)^{-1}\,tB\,(t+B)^{-1}\,(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda =$$

$$= -\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-A)^{-1}B(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda +$$

$$+\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-A)^{-1}\frac{t}{t-\lambda}B(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda -$$

$$-\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-A)^{-1}\frac{t}{t-\lambda}B(t+B)^{-1}x\,d\lambda =$$

$$=\frac{t^\theta}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda}{t-\lambda}(\lambda-A)^{-1}B(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\frac{t}{\lambda})^\theta\frac{1}{\frac{t}{\lambda}-1}\,\lambda(\lambda-A)^{-1}\,\lambda^\theta\,B(\lambda+B)^{-1}x\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

Visto che $x\in(X_0,\mathcal{D}(B))_{\theta,p}$ la funzione

$\rho\to\rho e^{i\phi}(\rho e^{i\phi}-A)^{-1}\,\rho^\theta\,e^{i\theta\phi}\;B(\rho e^{i\phi}+B)^{-1}x$

ha norma in L^p rispetto alla misura $\frac{d\rho}{\rho}$ e quindi $t\to t^\theta B(B+t)^{-1}\,BSx$ è essenzialmente la convoluzione moltiplicativa su R^+ di una funzione L^1 e una L^p, quindi è in L^p, cioè $BSx\in(X_0,\mathcal{D}(B))_{\theta,p}$.

Infine essendo $ASx=x-BSx$ anche $ASx\in(X_0,\mathcal{D}(B))_{\theta,p}$ e si ha la regolarità massimale.

Tornando alle ipotesi fatte su A e B osserviamo che H6-H7 prendono il

posto delle stime del tipo (2) che non sono sufficienti per sviluppare la teoria

H6 e H7 sono evidentemente ipotesi più forti della semplice richiesta di una stima come (2).

Vedremo comunque come in un caso significativo la decomposizione del risolvente di A richiesta in H6-H7 si ottenga facilmente.

Nel seguito dato $\theta \in R^+$ indicheremo con $\mathscr{D}(B_j;\theta,p)$ lo spazio di interpolazione $(X_j, \mathscr{D}(B_j^m))_{\frac{\theta}{m}}$ con $m \in N$ $m > \theta$.

Tale spazio non dipende da m e se θ non è intero coincide con

$$(\mathscr{D}(B_j^{[\theta]}), \mathscr{D}(B_j^{[\theta]+1}))_{\theta-[\theta],p}$$

e può essere caratterizzato come lo spazio degli $x \in \mathscr{D}(B_j^{[\theta]})$ tali che la funzione $t \to t^{\theta-[\theta]} \| B_j (t+B_j)^{-1} B_j^{[\theta]} x \|$ appartiene allo spazio L^p rispetto alla misura dt/t su R^+ (vedi p.es. [T] § 1.14).

Si può allora dimostrare il seguente risultato di regolarità massimal in spazi di interpolazione.

Teorema 2 ([DV2]). *Supposte soddisfatte* H1-H8, *siano* $p \in [1,+\infty]$ *e* $\theta \in R^+$ *tali che*

$$\theta + \alpha_n - \alpha_j \notin Z \quad \text{per} \quad 0 \le j \le n$$

Poniamo

$$Y = \bigcap_{j=0}^{n} (B_j ; \theta+\alpha_n-\alpha_j, p)$$

Allora $\forall x \in Y$ *l'equazione* $(A+B)u = x$ *ha una unica soluzione* $Sx \in Y$ *e inoltre*

$Asx \in Y$, $BSx \in Y$.

L'esistenza in X_0 e unicità della soluzione sono conseguenza immediata del teorema 1. Tale teorema assicura inoltre che

$$Sx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda$$

Se n=0 allora $Y = \mathcal{D}(B;\theta,p)$. Se $\theta<1$ il teorema 1 consente di concludere che si ha regolarità massimale in Y. Sfruttando il fatto che B commuta con S si può ricavare la regolarità massimale anche nel caso $\theta>1$.

Vediamo ora come si passa ad n=1. Si avrà in questo caso

$$Y = \mathcal{D}(B_1;\theta,p) \cap \mathcal{D}(B_0;\theta+\alpha_1,p).$$

Evidentemente $Y \subset (B_0;\theta+\alpha_1,p)$ e quindi in base a ciò che si è già dimostrato se $x\in Y$ allora ASx e BSx appartengono a $\mathcal{D}(B_0;\theta+\alpha_1,p)$. Resta allora da provare che ASx e BSx appartengono a $\mathcal{D}(B_1;\theta,p)$. Supponiamo $\theta<1$.

Sfruttiamo la decomposizione di $(\lambda-A)^{-1}$ come segue.

Anzitutto si ha

$$Sx = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}(1+B)(1+B)^{-1}(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}\frac{1}{1-\lambda}(1+B)(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}\frac{1}{1-\lambda}(1+B)(1+B)^{-1}x\,d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-A)^{-1}\frac{1}{1-\lambda}(1+B)(\lambda+B)^{-1}x\,d\lambda$$

Se $x \in \mathcal{D}(B^{\ell})$ si può ripetere il procedimento fino ad ottenere

$$Sx = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda-A)^{-1} \frac{1}{(1+\lambda)^{\ell+1}} (1+B)^{\ell+1} (\lambda+B)^{-1} x \, d\lambda$$

Questo consente di scrivere Sx anche come integrale nello spazio X_1 in cui $(\lambda-A)^{-1}$ non ha una buona decrescenza; in particolare se

$$x \in Y \subset \mathcal{D}(B_0, \theta+\alpha_1, p) \subset \mathcal{D}(B_0{}^{[\theta+\alpha_1]})$$

(visto che $[\theta+\alpha_1] < \theta+\alpha_1$) utilizzando la formula precedente si prova che

$$S_x = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{1,0}(\lambda) \left(\frac{1+B}{1-\lambda}\right)^{[\theta+\alpha_1]} (\lambda+B^{-1}) x \, d\lambda -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{1,1}(\lambda) (\lambda+B_1)^{-1} x \, d\lambda$$

Utilizzando questa espressione di Sx con metodi simili a quelli della dimostrazione del teorema 1 si ottiene che $BSx \in \mathcal{D}(B_1; \theta, p)$.

Il caso $\theta > 1$ si ricava facilmente da ciò che si è appena provato.

Infine $ASx = x - BSx$ e quindi anche $ASx \in \mathcal{D}(B_1; \theta, p)$.

Il caso n arbitrario viene provato per induzione in modo simile a quanto visto sinora.

3. APPLICAZIONI

Vediamo ora un caso in cui il risolvente $(\lambda-A)^{-1}$ di un operatore lineare A può essere decomposto in modo da soddisfare H6-H8.

Siano X,Z spazi di Banach complessi con Z immerso con continuità in

X. Sia A un operatore chiuso in X che soddisfi H1. Sia $n \in N$ tale che $\mathcal{D}(A^n)$ con la norma del grafico, cioè $\|x\|_{\mathcal{D}(A^n)} = \|A^n x\|_X$, è immerso con continuità in Z.

Per $j = 0,1,\ldots,n$ sia $X_j = \{x \in X: A^{j-n}x \in Z\}$ e su tale spazio definiamo

$$\|x\|_j = \|A^{j-n}x\|_Z + \|x\|_X$$

Si prova facilmente che X_j è uno spazio di Banach, che $X_{j+1} \subset X_j$ e $X_0 = X, X_n = Z$.

Se $\lambda \in \rho(A)$ allora per $0<k\leq n$ è

$$(\lambda-A)^{-1} = -\sum_{j=1}^{k-1} \lambda^{j-1} A^{-j} + \lambda^{k-1}A^{-k+1}(\lambda-A)^{-1}$$

cosa che può facilmente essere dimostrata applicando $\lambda-A$ a entrambi i membri della uguaglianza.

Ponendo allora $R_{k,0}(\lambda) = \lambda^{k-1}A^{-k+1}(\lambda-A)^{-1}$, $R_{k,k}(\lambda)=0$ e per $1\leq j<k$ $R_{k,j}(\lambda) = -\lambda^{k-j-1}A^{j-k}$, si ottiene $(\lambda-A)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} R_{k,j}(\lambda)$ e si può dimostrare che sono soddisfatte H6 e H7 con $\alpha_k = k$. Questo consente di ottenere dal teorema 2

Teorema 3. ([DV2]). *Siano X,Z spazi di Banach complessi con* $Z \subset X$. *Siano A e B operatori lineari chiusi in X.*

Supponiamo che A e B soddisfino H1-H4 nello spazio X, che $\mathcal{D}(A^n) \subset Z$ *e che Z sia invariante per il risolvente di B con* $\|(\mu-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C(1+|u|)^{-1}$. *Sia* $p \in [1,+\infty]$ *e* $\theta \in R^+ \setminus N$.

Poniamo

$$Y=\{x \in \mathcal{D}(B;\theta+n,p): A^{-k}x \in \mathcal{D}(B_Z;\theta+k,p) \text{ per } k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

Allora $\forall x \in Y$ *l'equazione* $(A+B)u = x$ *ha una unica soluzione* $Sx \in Y$ *e inoltre*

$ASx \in Y$ *e* $BSx \in Y$.

Questo teorema può essere applicato a un problema di valori iniziali e al contorno per l'equazione del calore come segue.

Sia Ω un aperto limitato di R^n con frontiera C^∞ e siano $1<p<\infty$, $t \in R^+$. Poniamo

$$X = L^p(0,T;\, L^p(\Omega))$$

$$Z = L^p(0,T;W^{2n,p}(\Omega))$$

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega)):\ u\big|_{[0,T]x\partial\Omega} = 0\}$$

$A:\mathcal{D}(A)\to X$ tale che $(Au)(t) = -\Delta u(t)$

$$\mathcal{D}(B) = \{u \in W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega)):\ u(0) = 0\}$$

$B:\mathcal{D}(B)\to X$ tale che $Bu = u'$.

Il teorema 3 può essere applicato nella presente situazione.

Lo spazio Y, se $\theta \in]0,1[$, $\theta \neq \frac{1}{p}$ risultato essere uguale a $\bigcap_{k=0}^{n} W_o^{\theta+k,p}(0,T;W^{2(n-k),p}(\Omega))$ dove $W_o^{\theta+k,p}$ è lo spazio delle funzioni $u \in W^{\theta+k,p}$ con tutte le tracce che esistono nulle in 0.

D'altra parte utilizzando un risultato di Grisvard sulla commutativit dei funtori di interpolazione reale e complesso ([G] teor. 4.1) si prova che se $0<k<n$ allora $W_o^{\theta+k,p}(0,T;W^{2(n-k),p}(\Omega))$ è di interpolazione tra $W_o^{\theta,p}(0,T;W^{2n,p}(\Omega))$ e $W_o^{\theta+n,p}(0,T;L^p(\Omega))$ e quindi contiene la intersezione dei due

Risulta quindi

$$Y = W_o^{\theta,p}(0,T;W^{2n,p}(\Omega)) \cap W_o^{\theta+n,p}(0,T;L^p(\Omega))$$

In conclusione si ha quindi:

Teorema 4. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in]0,1[$, $\theta \neq 1/p$. *Poniamo*

$$Y = W_o^{\theta,p}(0,T;W^{2n,p}(\Omega)) \cap W_o^{\theta+n,p}(0,T;L^p(\Omega))$$

Allora $\forall f \in Y$ *il problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{in } [0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = 0 & x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione u *in* Y *ed inoltre* $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in Y$, $\Delta u \in Y$.

Prendendo invece $Z = W^{n,p}(0,T;L^p(\Omega))$ e scambiando il ruolo degli operatori A e B si ha:

Teorema 5. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in]0,1[$, $\theta \neq \dfrac{1}{2}$, $\theta \neq \dfrac{1}{2p}$. *Poniamo*

$$Y = L^p(0,T, W_o^{2n+2\theta,p}(\Omega)) \cap W^{n,p}(0,T; W_o^{2\theta,p}(\Omega))$$

(dove lo zero al piede indica che se esiste la traccia su $\partial\Omega$ *di* $u, \Delta u, \Delta^2 u, \ldots$ *allora essa è nulla).*

Allora $\forall f \in Y$ *il problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{in } [0,T] \times \Omega \\ u(0,x) = 0 & x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione u *in* Y *ed inoltre* $\frac{\partial u}{\partial t} \in Y$, $\Delta u \in Y$.

4. REGOLARITA' IN SPAZI ς-CONVESSI

Ciò che verrà ora esposto è conseguenza di

Teorema 6. ([DV1] teor. 2.1). *Sia* X *uno spazio di Banach complesso* ς*-convesso.*

Siano A,B *operatori lineari chiusi in* X *tali che*

I) $\forall t \in]-\infty,0]\ \ t \in \rho(A)$ *e* $\|(t-A)^{-1}\| \leq C(1+|t|)^{-1}$

$\forall t \in]-\infty,0]\ \ t \in \rho(B)$ *e* $\|(t-B)^{-1}\| \leq C(1+|t|)^{-1}$

II) $\forall \lambda \in \rho(A)\ \ \forall \mu \in \rho(B)\ \ (\lambda-A)^{-1}$ *commuta con* $(\mu-B)^{-1}$

III) $\forall s \in R\ \ A^{is}$ *e* B^{is} *sono operatori limitati e* $\|A^{is}\| \leq C\, e^{\theta_A|s|}$

$\|B^{is}\| \leq C\, e^{\theta_B|s|}$ *con* $\theta_A+\theta_B<\pi$

Allora A+B *è chiuso e invertibile e quindi* $A(A+B)^{-1}$ *e* $B(A+B)^{-1}$ *sono limitati.*

Per ciò che riguarda gli spazi ς-convessi vedi [V] o la bibliografia di [DV1].

Ricordiamo comunque che gli spazi L^p o $W^{k,p}$, per $1<p<\infty$ sono ς-convessi.

Teorema 7. *Sia* X *uno spazio di Banach complesso e* ς*-convesso. Siano* A *e* B *operatori in* X *che soddisfino le ipotesi del teorema 6.*

Sia $Z \subsetneq X$ *invariante per il risolvente di* B *e tale che* $\mathcal{D}(A^n) \subsetneq Z$.

Poniamo

$$Y = \{x \in \mathcal{D}(B^n):\ A^{-k}x \in \mathcal{D}(B_z^k) \text{ per } k = 0,1\ldots n-1\}$$

Allora $\forall x \in Y$ *l'equazione* $(A+B)u = x$ *ha una unica soluzione* $Sx \in Y$ *e inoltre* $ASx \in Y$, $BSx \in Y$.

Per dimostrare questo teorema occorre anzitutto osservare, che visto che Z è invariante per il risolvente di B la condizione $A^{-k}x \in \mathcal{D}(B_z^k)$ equivale a $A^{-k}x \in \mathcal{D}(B^k)$ e $B^k A^{-k}x \in Z$, quindi

$$Y = \{x \in \mathcal{D}(B^n) : B^k A^{-k}x \in Z \quad \text{per} \quad k = 0,1,\ldots,n-1\}$$

La equazione ha una unica soluzione in X per il teorema 6 e essa sarà $(A+B)^{-1}x$.

Dimostriamo che dato $x \in Y$ allora $B(A+B)^{-1}x \in Y$.

Visto che $Y \subset \mathcal{D}(B^n)$ e che B^n commuta con $B(A+B)^{-1}x$ si ha $B(A+B)^{-1}x \in \mathcal{D}(B^n)$. $B^{n-1}\ A^{1-n}B(A+B)^{-1}x = A^{1-n}(A+B)^{-1}B^n x$, ma $(A+B)^{-1}$ ha codominio contenuto in $\mathcal{D}(A)$ e quindi $A^{1-n}(A+B)^{-1}B^n x \in \mathcal{D}(A^n) \subset Z$ cioè $B^{n-1}\ A^{1-n}B(A+B)^{-1}x \in Z$.

Tenuto conto che

$$B(A+B)^{-1}x = BA^{-1}x - BA^{-1}\ B(A+B)^{-1}x$$

si ha

$$B^{n-2}\ A^{2-n}\ B(A+B)^{-1}x = B^{n-1}A^{1-n}x - A^{1-n}(A+B)^{-1}B^n x$$

e il primo addendo è in Z per ipotesi, il secondo come prima perché contenuto in $\mathcal{D}(A^n)$, dunque

$$B^{n-2}\ A^{2-n}\ B(A+B)^{-1}\ x \in Z.$$

Proseguendo si ottiene $B^k A^{-k} B(A+B)^{-1}x \in Z$ per $k = 0,1,\ldots,n-1$ e quindi $B(A+B)^{-1}x \in Y$. Essendo $A(A+B)^{-1}x = x - B(A+B)^{-1}x$ anche $A(A+B)^{-1}x \in Y$.

Questo teorema può essere applicato all'equazione del calore (vedi [DV1] § 3) e consente di ottenere i risultati dei teoremi 4 e 5 con $\theta = 0$.

Si avrà quindi regolarità massimale in

$$L^p(0,T;W^{2n,p}(\Omega)) \cap W_o^{n,p}(0,T;L^p(\Omega))$$

e in

$$L^p(0,T,W_o^{2n,p}(\Omega)) \cap W^{n,p}(0,T,L^p(\Omega))$$

e perciò anche nella somma dei due spazi che è costituita dalle funzioni f appartenenti a

$$L^p(0,T;W^{2n,p}(\Omega)) \cap W^{n,p}(0,T;L^p(\Omega))$$

tali che se $\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} \Delta^m f$ ha traccia in $\{0\} \times \partial\Omega$ allora tale traccia è 0.

Le condizioni su f così ottenute sono più forti delle condizioni di compatibilità necessarie per la esistenza di una soluzione del problema di condizioni iniziali e al contorno (vedi p. es. [S]). Si può però dimostrare che dal fatto che f soddisfa le condizioni necessarie non segue che Δu le soddisfa.

Non si può quindi avere regolarità massimale nello spazio delle funzioni $L^p(0,T;W^{2n,p}(\Omega)) \cap W^{n,p}(0,T;L^p(\Omega))$ che soddisfano le sole condizioni di compatibilità.

BIBLIOGRAFIA

[DPG] G. DA PRATO, P. GRISVARD: Sommes d'opérateurs lineaires et équations différentielles opérationelles; J. Math. Pures Appl., (9), 54 (1975), 305-387.

[DV1] G. DORE, A. VENNI: On the closedness of the sum of two closed operators; Math. Z., 196 (1987), 189-201.

[DV2] G. DORE, A. VENNI: Maximal regularity for abstract differential equations in higher order interpolation spaces; preprint.

[G] P. GRISVARD: Commutativité de deux foncteurs d'interpolations et applications; J. Math. Pures Appl., (9), 45 (1966), 143-290.

[S] V.A. SOLONNIKOV: On boundary value problems for linear parabolic systems of general form, Trudy Math. Inst. Steklov, 83 (1965).

[T] H. TRIEBEL: Interpolation theory, function spaces, differential operators; North Holland, Amsterdam, 1978.

[V] A. VENNI: Proprietà geometriche di uno spazio di Banach e convergenza della trasformata di Hilbert. Seminario di Analisi Matematica, Bologna, 1986/1987.